4 КОМПЛЕКС АЙНЫМАЛЫ ЭЛЕМЕНТАР ФУНКЦИЯЛАР
4.1 Негізгі түрлері

Математикалық анализ курсында кез келген нақты x үшін

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots,$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$$

теңдіктерінің орынды болатыны көрсетілген.

Осы тұрғыдан комплекс айнымалы e^z көрсеткіштік және $\sin z$, $\cos z$ тригонометриялық функцияларын да сәйкес дәрежелік қатарлардың қосындысы ретінде анықтаймыз:

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots;$$

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\cdot\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots;$$

$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{z^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\cdot\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\ldots.$$

Берілген қатарлар z-тің кез келген мәнінде абсолютті жинақты болады, яғни берілген функциялар бүкіл комплекс жазықтығында анықталған.

Бұл анықтамалардан, қатарлар абсолютті жинақты болғандықтан, комплекс $z=x+iy$ айнымалы аталған функциялардың келесі пара-пар анықтамалары шығады:

$$e^z=e^x(\cos y+i\sin y);$$

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2};$$

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}.$$

e^z көрсеткішті функциясы төмендегі қасиеттерге ие:

1) $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}e^{z_2}$, мұндағы z_1, z_2 – кез келген комплекс сандар;

2) $e^{z+2\pi ki}=e^z$, $k=0,1,\ldots$, яғни e^z - $2\pi i$- периодты функция.

Тригонометриялық $\sin z$ және $\cos z$ функциялары 2π - периодты.

$\operatorname{tg} z$ және $\operatorname{ctg} z$ функциялары келесі теңдіктермен анықталады:

$$\operatorname{tg} z=\frac{\sin z}{\cos z}=\frac{e^{i\cdot z}-e^{-i\cdot z}}{i\cdot\left(e^{i\cdot z}+e^{-i\cdot z}\right)};\quad z\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots;$$

$$\operatorname{ctg} z=\frac{\cos z}{\sin z}=\frac{i\cdot\left(e^{i\cdot z}+e^{-i\cdot z}\right)}{\left(e^{i\cdot z}-e^{-i\cdot z}\right)};\quad z\neq k\pi\quad k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots.$$

$\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$ - π - периодты функциялар.

Гиперболалық $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{th} z$, $\operatorname{cth} z$ **функциялары** келесі теңдіктермен анықталады:

$$\operatorname{sh} z=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2};\qquad \operatorname{th} z=\frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}=\frac{e^{z}-e^{-z}}{e^{z}+e^{-z}};$$

$$\operatorname{ch} z=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2};\qquad \operatorname{cth} z=\frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}=\frac{e^{z}+e^{-z}}{e^{z}-e^{-z}}.$$

Гиперболалық және тригонометриялық функциялар үшін келесі тепе-теңдіктер орынды болады:

$\sin(i z)=i\operatorname{sh} z$; $\qquad \operatorname{sh}(iz)=i\sin z$;

$\cos(i z)=\operatorname{ch} z$; $\qquad \operatorname{ch}(iz)=\cos z$;

$\operatorname{tg}(i z)=i\operatorname{th} z$; $\qquad \operatorname{th}(i z)=i\operatorname{tg} z$;

$\operatorname{ctg}(i z)=-i\operatorname{cth} z$; $\qquad \operatorname{cth}(i z)=-i\operatorname{ctg} z$.

Бұл тепе-теңдіктерден $\operatorname{sh} z, \operatorname{ch} z$ функцияларының $2\pi i$ - периодты, ал $\operatorname{th} z$, $\operatorname{cth} z$ функцияларың πi - периодты екендігі шығады.

Комплекс айнымалы **логарифмдік функция** көрсеткіштік функцияға кері функция ретінде анықталады:

$$\operatorname{Ln} z=\ln|z|+i\operatorname{Arg} z=\ln|z|+i(\arg z+2k\pi),\quad k=0;\pm 1;\pm 2;\ldots,\quad z\neq 0.$$

Функцияның $k=0$ жағдайына сәйкес мәні оның бас мәні деп аталып

$$\ln z=\ln|z|+i\arg z$$

түрінде белгіленеді.

Комплекс айнымалы логарифмдік функцияның қасиеттері:

$$\operatorname{Ln}(z_1 z_2)=\operatorname{Ln} z_1+\operatorname{Ln} z_2;$$

$$\operatorname{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\operatorname{Ln} z_1-\operatorname{Ln} z_2,\quad z_1\neq 0,\ z_2\neq 0;$$

$$\operatorname{Ln}(z)^n=n\operatorname{Ln} z+2\pi k i,\quad k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots,\quad \operatorname{Ln}\left(\sqrt[n]{z}\right)=\frac{1}{n}\operatorname{Ln} z.$$

Кері тригонометриялық $\operatorname{Arcsin} z$, $\operatorname{Arccos} z$, $\operatorname{Arctg} z$, $\operatorname{Arcctg} z$, $\operatorname{Arsh} z$, $\operatorname{Arch} z$, $\operatorname{Arth} z$, $\operatorname{Arcth} z$ **функциялары** $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{th} z$, $\operatorname{cth} z$ функцияларына сәйкес кері функциялар ретінде анықталады. Мысалы, егер z=cosw болса, онда онда w берілген z санының арккосинусы делініп, w=Arccosz түрінде белгіленеді. Бұл функциялардың барлығы да көп мәнді болып келеді және логарифмдік функция арқылы анықталады:

$$\operatorname{Arcsin} z=-i\operatorname{Ln}\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right);\qquad \operatorname{Arsh} z=\operatorname{Ln}\left(z+\sqrt{z^2+1}\right);$$

$$\operatorname{Arccos} z=-i\operatorname{Ln}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right);\qquad \operatorname{Arch} z=\operatorname{Ln}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right);$$

$$\mathrm{Arctg}\ z=\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\left(\frac{1-iz}{1+iz}\right); \qquad \mathrm{Arth}\ z=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\left(\frac{1+z}{1-z}\right),\ z\neq 1;$$

$$\mathrm{Arcctg} z=\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\left(\frac{iz+1}{iz-1}\right); \qquad \mathrm{Arcth} z=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\left(\frac{z+1}{z-1}\right),\ z\neq 1.$$

Бұл кері тригонометриялық функциялардың логарифмнің бас мәніне сәйкес келетін мәндері *бас мәндер* деп аталып сәйкесінше: arcsinz, arccosz, arctgz, arcctgz, arcshz, arcchz, arcthz, arccthz түрінде белгіленеді.

Мысалы: arcsinz=ln(iz+ $\sqrt{1-z^2}$) – Arcsinz функциясының бас мәні болады.

Дәрежелік $W = z^a$ (a - кез келген комплекс сан) *функциясы* келесі қатынаспен анықталады

$$z^a = e^{a\mathrm{Ln} z},\quad z\neq 0.$$

Lnz көпмәнді болғандықтан z^a функциясы көпмәнді, ал

$z^a = e^{a\cdot \ln z}$ - оның бас мәні деп аталады.

Көрсеткіштік $W = a^z$ *функциясы,* мұндағы a – нөлден өзгеше комплекс тұрақты,

$$a^z = e^{z\cdot \mathrm{Ln} a}$$

теңдігімен анықталады. Бұл функцияның бас мәні $e^{z\cdot \ln a}$ болады.

$$a^{z_1}\cdot a^{z_2}\neq a^{z_1+z_2},\qquad \left(a^{z_1}\right)^{z_2}\neq a^{z_1\cdot z_2}.$$